RÉÉCRITURE L-SYSTÈME D'UN ENSEMBLE DE PERMUTATIONS

Antoine CASANOVA

Mots-clé: L-système, Lindenmayer, ordre, désordre, permutation.

1.1. Résumé

Nous exposons une nouvelle façon d'obtenir des permutations d'éléments. Nous montrons que des permutations peuvent être obtenues de la même façon que nous déterminons la croissance d'organismes végétaux avec des systèmes de réécritures de motifs.

Nous exposons la méthode pour construire des ensembles de permutations ordonnées avec des chaînes L-système de Lindenmayer [3]. Puis, nous donnons une représentation graphique de ces chaînes L-systèmes.

1.2. Symétrie des permutations ordonnées

La solution que nous proposons repose sur l'étude des changements de positions des éléments permutables de {1..n}. Les séquences décrivant ces changements sont agrégées en une seule chaîne dont la caractéristique est d'être symétrique tout comme 123 est le symétrique de 321.

Pour commencer, nous considérons toutes les permutations des éléments {1, 2, 3}. Nous les classons par ordre croissant: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Nous écrivons cette liste ordonnée dans les 3 colonnes (a, b, c) du tableau ci-dessous.

Positions				
a	**b**	**c**		Séquences obtenues
1	2	3	Le 1 occupe les positions	**a, a, b, c, b, c**
1	3	2		
2	1	3	Le 2 occupe les positions	**b, c, a, a, c ,b**
2	3	1		
3	1	2	Le 3 occupe les positions	**c, b, c, b, a, a**
3	2	1		

Nous lisons dans le tableau que l'élément '1' occupe les positions {a, b, c} dans l'ordre { a, a, b, c, b, c}. De la même façon, l'élément '2' occupe les positions { a, b, c} dans l'ordre { b, c, a, a, c, b}. L'élément '3' occupe les positions { a, b, c} dans l'ordre { c, b, c, b, a, a}. La juxtaposition (1) des séquences obtenues montre une symétrie des positions (2). Nous appelons Fac(3) la chaîne L-système donnant l'ensemble des permutations possibles des trois éléments. La chaîne s'écrit et se simplifie successivement comme suit :

1) Fac(3)= {aabcbc}, {bcaacb}, {cbcbaa} ;

2) Fac(3)= {aa+bc bc bc+aa+cb cb cb+aa} ;

Nous simplifions cette chaîne (3) en associant aux positions {a, b, c} les représentants respectifs {A, B, C} de telle façon qu'à A on associe (n-1) ! fois la position 'a', à B on associe (n-2) ! et à C on associe (n-3) !

3) Fac(3)= {A + 3(B + C) + A + 3(C + B) + A).

1.3. Transformation d'une chaîne Fac(n) en Fac(n+1)

Nous exposons les "règles" qui conditionnent la formation d'une chaîne Fac(n+1) à partir d'une chaîne antécédente Fac(n).

1.3.1. Structure d'une chaîne

Il existe deux types de chaîne. Le premier type de chaîne regroupe les chaînes impaires et ont pour centre A, le deuxième type de chaîne regroupe les chaînes paires et ne possèdent pas de motif en leur centre. Très simplement, une chaîne est impaire pour tous 'n' impair et une chaîne est paire pour tous 'n' pair. Chaque bloc, séquence comprise entre deux A, est multiplié par 'n'. Par contre, le bloc central d'une chaîne paire sera multiplié par $n/2$.

1.3.2. Substitution d'un élément d'une chaîne

La substitution est le remplacement de (n-Δ)! par le couple (n-Δ)!+(n-Δ-1)! La substitution n'est effectuée que dans les deux groupes situés entre le premier et le deuxième A, et symétriquement entre l'avant dernier et le dernier A.

Ainsi, à partir de la chaîne Fac(3), le caractère C est remplacé par le motif 2(C+D), puis le caractère D est lui-même remplacé par le motif 2(D+E).

fac(3)= { A + 3 (B + C) + A + 3 (C + B) + A }

Substitution 1 Substitution symétrique 1

fac(4)= { A + 4 (B + *2* (C + D)) + A + 2 ((C + D) + B+ (D + C))
+ ((C+ D) + B + (D + C)) 2 + A + ((D + C) 2 + B) 4 + A }

Substitution 2 Substitution symétrique 2

fac(5)= { A + 5 (B+ 3 (C + 2 (D + E)))+ A + 5 ((C + 2 (D + E))+ B
+ 2 ((D+ E)+ C + (E+ D)))+ A + (((D+ E)+ C + (E+ D)) 2+ B
+ ((E+ D) 2+ C)) 5+ A + (((E + D) 2+ C) 3+ B) 5+ A }

Le phénomène se reproduit symétriquement. Le caractère C est remplacé par le motif 2(D+C), puis le caractère D est lui-même remplacé par le motif 2(E+D).

1.3.3. Mutation d'une séquence d'éléments d'une chaîne

Nous appelons mutation, l'augmentation d'une unité du Δ de (n-Δ)! La mutation s'applique sur toutes les séquences du type: " n (x) + A + n (y) ". La mutation d'un motif A est le motif B, puis la mutation de B est C, et ainsi de suite. La mutation se fait selon le schéma ci-dessous.

Fac(5)= { A + n (x) + A + n (y) + A + (y) n + A + (x) n + A }

Fac(6)= { A + (n+1) Substitution (x) + A + (n+1) Mutation (x+A+y) + A + (n+1)/2 Mutation (y+A+y) ∅ ... }

D'une façon générale Fac(n-1) sert de matrice pour construire Fac(n).

1.3.4. Règles gérant la répétition des blocs d'une chaîne

Nous avons vu que deux blocs subissent une mutation pour créer un nouveau bloc. Ces deux blocs ne se développent pas dans les mêmes proportions. Le deuxième bloc croit en fonction unique de l'accroissement du premier bloc. Trois règles de calculs régissent le processus de pondération du deuxième bloc.

Première règle

Le premier coefficient du premier bloc, constitue l'élément de référence pour le calcul du coefficient répétiteur du deuxième bloc s'il est différent de 'n'. Si le premier coefficient intégré du premier bloc est '*a*' et qu'il ne s'agit pas de la construction du bloc central de la chaîne alors le facteur répétiteur se calculera avec l'équation de ci-dessous.

Equation 1: $Coefficient = n - a - 2$

Pour déterminer le coefficient du deuxième bloc d'une chaîne Fac(7), nous devons lire le premier coefficient du premier bloc qui est différent de 'n'. Le coefficient du premier bloc est '((' et signifie l'unité, le deuxième coefficient se calcule comme étant 7-1-2=4.

Fac(7)= {... + 7 <u>**((**</u>C + 4 (D + 3 (E + 2 (F + G))))+ B + **coefficient** ((D + 3 (E + ...))))) + A +...}.

Règle 1

Fac(7)= {... + 7 ((C + 4 (D + 3 (E + 2 (F + G))))+ B + **4** ((D + 3 (E + ...))))) + A +...}.

Deuxième règle

On utilise le coefficient de l'Equation 2 quand le bloc à construire est le dernier bloc avant le centre de la chaîne. Il faut aussi que 'n' soit impair et que le coefficient à transformer soit celui du deuxième bloc de la factorielle précédente Fac(n-1). Dans ce cas précis, le coefficient du deuxième bloc subissant la mutation sera calculé par l'équation ci-dessous.

Equation 2 : $Coefficient = \frac{(n-3)}{2}$

Par exemple, on calcule le coefficient du deuxième bloc de la chaîne Fac(5), comme suit : $(n-3)/2 = (5-3)/2 = 1$. On constate que le coefficient n'influence pas la répétition du deuxième bloc puisqu'il est égal à l'unité.

Fac(4)= {...+ 4 $\boxed{\text{(B + 2 (C + D))}}$ + A + 2 $\boxed{\text{((C + D) + B + (D + C))}}$ ∅ ((C + D) + B + (D + C)) 2 +...}

Bloc 1 **Règle 2** **Bloc 2**

Fac(5)= {... + 5 $\boxed{\text{((C + 2 (D + E))}}$ + B + $\boxed{\text{(2x1)}}$ $\boxed{\text{((D + E) + C + (E + D)))}}$ + A + (((D + E) + C + (E +...}

Troisième règle

On utilise le coefficient de l'Equation 3 quand le bloc à construire est le bloc central. Il faut aussi que 'n' soit pair et que le coefficient 'n' à transformer soit celui du deuxième bloc de Fac(n-1). Si ces trois conditions sont réunies alors le coefficient se calcule avec l'équation ci-dessous.

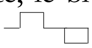
Equation 3: $Coefficient = \frac{n}{2}$

Par exemple, le coefficient du bloc central de Fac(6) est calculé comme étant la moitié de 'n'. Puisque n=6, le coefficient du bloc est $n/2 = 6/2 = 3$. Nous le plaçons en tant que premier facteur du bloc central de Fac(6).

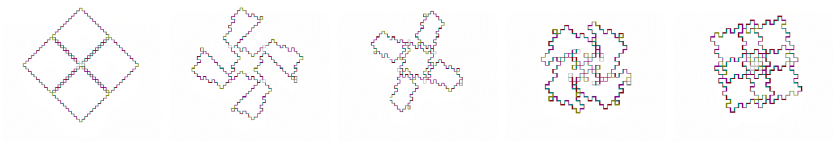
Règle 3

Fac(6)= {... + <u>**3**</u> (2 ((D + 2 (E + ...) ∅ (... + E) 2 + D)) 2) 3 + ...}

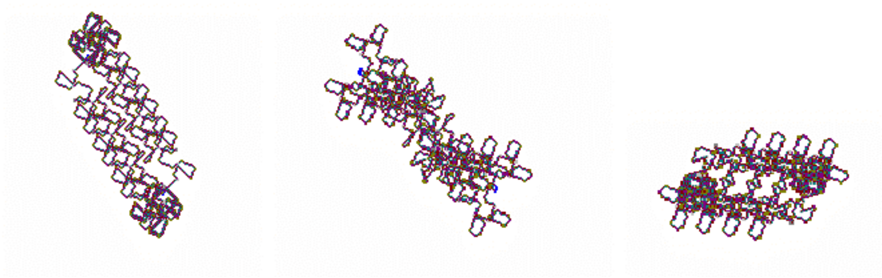
1.4. Représentation graphique L-système de Fac(n)

Pour pouvoir représenter Fac(n) en deux dimensions, nous transformons la chaîne en séquences binaires. Nous attribuons aux bits '0' et '1' des tracés orientés en opposition : Si le bit '0' est un tracé à droite, le bit '1' sera alors un tracé à gauche. Ainsi, la valeur binaire (1011010000) de 6! sera le motif: 

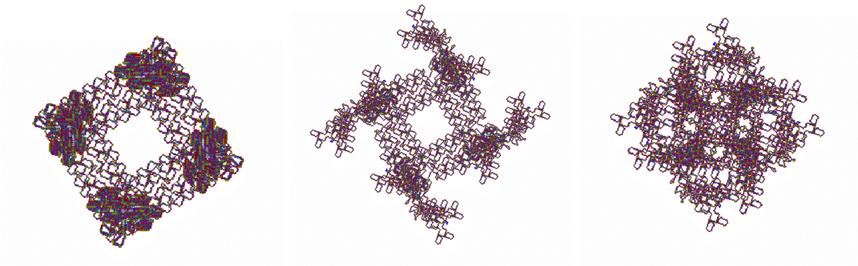
Motifs de Fac(6)



Motifs de Fac(8)



Motifs de Fac(9)



1.5. Conclusion

La méthode que nous avons exposée a mis en exergue les règles de construction et d'accroissement d'ensembles de permutations. Parmi ces règles, la substitution de motifs et la mutation de motifs interviennent sur la diversité des motifs, tandis que trois autres règles interviennent sur la redondance de ces motifs.

Les permutations sont constructibles avec un langage simple de réécriture de motifs qui permet d'en donner une représentation graphique. Les dessins de ces permutations sont équilibrés et ils montrent bien que les permutations sont symétriques et insoumises à l'arbitraire et au hasard [2].

Cette nouvelle méthode d'élaboration de permutations par l'emploi d'un système de réécriture de Lindenmayer [3] est utilisable pour la caractérisation de séquences de symboles. En effet, la distance qui sépare un ordre parfaitement symétrique à un langage est représentative du désordre qui les sépare [1].

1.6. Bibliographie

[1] “ Méthodes d'analyses du langage crypté : une contribution à l'étude du manuscrit de Voynich ”, A. CASANOVA, Université PARIS 8, Paris, 1999.

[2] “ Symétrie et mathématique moderne ”, H. WEYL, édition FLAMMARION 1964, édition originale “ Symmetry ”, Princeton University Press 1952.

[3] “ Mathematical models for cellular interaction in development I-II ”, A. LINDENMAYER, Journal of theorical biology 18 (1968) pp280-315.